

Title	共通集合の測度
Author(s)	安西, 廣忠
Citation	全国紙上数学談話会. 2(9) p.265-p.266
Issue Date	1948-05-25
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75223
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

89. 共通集合の測度

(阪大) 安西 廣 忠

(1923. 2. 27)

空間上の n -次元 $measure$ を μ とする $\mu(\Omega) = 1$
 Ω の中に無限個の集合 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ が与えられていて
 $\mu(A_n) = \alpha$ $n = 1, 2, \dots$ $0 < \alpha < 1$ なるとき任意の自然数 p と実
 数 $\varepsilon > 0$ に対して Ω の集合の中なら適当に p 個 $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_p}$ を選ぶと
 の共通部分の $measure$ が $\alpha^p - \varepsilon$ より大きくなる

$$\mu(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_p}) > \alpha^p - \varepsilon$$

これは角谷さんから提出せられた問題であるが Holder の不等式を使えば簡単に
 証明出来る。

集合 A_n の characteristic function を $\varphi_n(x)$ とする。 $n = 1, 2, \dots$
 Holder の不等式により

$$\int (\varphi_1(x) + \dots + \varphi_n(x))^p dx \geq \left\{ \int (\varphi_1(x) + \dots + \varphi_n(x)) dx \right\}^p =$$

$$\left(\sum_{k=1}^n \int \varphi_k(x) dx \right)^p = n^p \alpha^p$$

$1 \leq i_1, i_2, \dots, i_p = n$ なる p 個の index の system のうち、すべての index
 が異なる system を T 、その残りを T' とする。

$$(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n)^p = \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in T} \varphi_{i_1} \varphi_{i_2} \dots \varphi_{i_p} + \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in T'} \varphi_{i_1} \varphi_{i_2} \dots \varphi_{i_p}$$

$$T \text{ の個数は } p!(\binom{n}{p}) = n(n-1) \dots (n-p+1)$$

$$T' \text{ の個数は } n^p - n(n-1) \dots (n-p+1) < p^2 n^{p-1} \text{ である。}$$

もしすべて $(i_1, i_2, \dots, i_p) \in T$ に対して

$$\mu(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_p}) \leq \alpha^p - \varepsilon \text{ とすれば}$$

$$\int \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in T} \varphi_{i_1}(x) \varphi_{i_2}(x) \dots \varphi_{i_p}(x) dx \leq n(n-1) \dots (n-p+1) (\alpha^p - \varepsilon)$$

$$\int \sum_{(i_1, \dots, i_p) \in T'} \varphi_{i_1}(x) \varphi_{i_2}(x) \dots \varphi_{i_p}(x) dx = p^2 n^{p-1} \alpha^p \text{ であるから}$$

$$n(n-1) \dots (n-p+1) (\alpha^p - \varepsilon) + p^2 n^{p-1} \alpha^p \geq n^p \alpha^p \text{ となればならぬ}$$

$$p^2 n^{p-1} \alpha^p > \varepsilon n(n-1) \dots (n-p+1)$$

p に対して δ が充分大きいときこれは成立しない。

要は ϕ と ε が與へられた時、どれ位大きな n を取れば $n \geq n_k$, $k=1, 2, \dots, p$ が存在して $m(A_{i_1} \wedge \dots \wedge A_{i_p}) > \alpha^p - \varepsilon$ となるかといふことも常時式から明かである。又 $m(A_{i_1} \wedge \dots \wedge A_{i_p}) > \alpha^p - \varepsilon$ となる (i_1, \dots, i_p) が表はれる。lower frequency も同様に計算する。

〔附記〕 名大の伊藤さんにはこの問題の結をした所、上記と同様の回答を寄せられた。